Министерство образования и науки Нижегородской области

Государственное бюджетное профессиональное образовательное учреждение

«НИЖЕГОРОДСКИЙ ПРОМЫШЛЕННО-ТЕХНОЛОГИЧЕКИЙ ТЕХНИКУМ»

КОНТРОЛЬНО - ОЦЕНОЧНЫЕ СРЕДСТВА
ЕН.03 ТЕОРИЯ ВЕРОЯТНОСТЕЙ И МАТЕМАТИЧЕСКАЯ СТАТИСТИКА

09.02.07 Информационные системы и программирование

Нижний Новгород
2023 год

Комплект контрольно-оценочных средств по учебной дисциплине разработан на основе Федерального государственного образовательного стандарта (далее – ФГОС) по специальности среднего профессионального образования (далее СПО) 09.02.07 Информационные системы и программирование, утвержденного Приказом Министерства просвещения России от 9 декабря 2016 года № 1547.

Организация-разработчик:
ГБПОУ «Нижегородский промышленно-технологический техникум»

Содержание

1.Паспорт комплекта контрольно-оценочных средств

2. Задания для текущего контроля, критерии оценки, эталоны ответов

3. Задания для промежуточной аттестации критерии оценки, эталоны ответов

4. Перечень информационных источников

1. Паспорт комплекта контрольно-оценочных средств

1.1. Место дисциплины в структуре основной профессиональной образовательной программы. Учебная дисциплина «Теория вероятностей и математическая статистика» принадлежит к математическому и общему естественнонаучному циклу (ЕН.00).

1.2. Цель и планируемые результаты освоения дисциплины:

Код ПК, ОК	*Умения*	*Знания*
ОК 01, ОК 02, ОК 04, ОК 05, ОК 09, ОК 10	Применять стандартные методы и модели к решению вероятностных и статистических задач Использовать расчетные формулы, таблицы, графики при решении статистических задач Применять современные пакеты прикладных программ многомерного статистического анализа	Элементы комбинаторики. Понятие случайного события, классическое определение вероятности, вычисление вероятностей событий с использованием элементов комбинаторики, геометрическую вероятность. Алгебру событий, теоремы умножения и сложения вероятностей, формулу полной вероятности. Схему и формулу Бернулли, приближенные формулы в схеме Бернулли. Формулу(теорему) Байеса. Понятия случайной величины, дискретной случайной величины, ее распределение и характеристики, непрерывной случайной величины, ее распределение и характеристики. Законы распределения непрерывных случайных величин. Центральную предельную теорему, выборочный метод математической статистики, характеристики выборки. ***Понятие вероятности и частоты***

2. Задания для проведения промежуточной аттестации

Практическая работа №1
Тема: «Подсчет числа комбинаций»

Цель: уметь применять формулы комбинаторики: размещения, сочетания, перестановки, правила сложения и умножения. Использовать при решении задач треугольник Паскаля и бином Ньютона.

Оборудование: ручка, методические рекомендации по выполнению работы.

Методические рекомендации по выполнению практической работы:
Задание №1.

Сколькими способами можно:

а) отобрать три различного цвета карандаша из 10 разноцветных карандашей, лежащих в коробке;

б) составить расписание различных занятий на пятницу из 8 предметов по 4 пары;

в) расставить на полке 7 книг, среди которых есть трехтомник А.С. Пушкина;

г) отбирать 3 мальчиков и 7 девочек для участия в конкурсе из группы в 25 человек, среди которых 10 мальчиков и 15 девочек.

Решение:

а) По условию задачи в коробке имеется 10 разноцветных карандашей, то есть n=10, из которых отбирают три любых карандаша, то есть m=3, так как порядок следования карандашей не важен, то будем использовать формулу сочетаний:

$$C_n^m = \frac{n!}{m! \cdot (n-m)!}$$

Найдем искомое число способов:

$$C_{10}^3 = \frac{10!}{3! \cdot (10-3)!} = \frac{10!}{3! \cdot 7!} = \frac{8 \cdot 9 \cdot 10}{3!} = \frac{8 \cdot 9 \cdot 10}{1 \cdot 2 \cdot 3} = 4 \cdot 3 \cdot 10 = 120$$

Ответ: 120.

б) По условию задачи в коробке имеется 8 учебных предметов, то есть n=8, расписание пятницы состоит из четырех пар, то есть m=4. В данном случае при составлении расписания порядок следования элементов в подмножестве важен, что означает использование формулы размещений:

$$A_n^m = \frac{n!}{(n-m)!}$$

Найдем искомое число способов составления расписания:

$$A_8^4 = \frac{8!}{(8-4)!} = \frac{8!}{4!} = 5 \cdot 6 \cdot 7 \cdot 8 = 1680$$

Ответ: 1680.

в) так три тома, входящие в трехтомник, должны стоять рядом, причем по возрастанию номера тома слева направо, рассматриваем их как один элемент данного множества, в котором имеется еще $7-3=4$ элемента, поэтому выбираем перестановки во множестве, содержащим 5 элементов, то есть n=5.

$$P_n = n!$$

$$P_5 = 5! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 = 120$$

Ответ: 120.

г) так как при отборе мальчиков и девочек не учитывается их порядок следования в подгруппах, то для вычислений воспользуемся формулой сочетаний, с другой стороны, так как выбирается 3 мальчика и 7 девочек, то необходимо воспользоваться правилом умножения:

$$C_{10}^3 \cdot C_{15}^7 = \frac{10!}{3! \cdot (10-3)!} \cdot \frac{15!}{7! \cdot (15-7)!} = \frac{10!}{3! \cdot 7!} \cdot \frac{15!}{7! \cdot 8!} =$$

$$= \frac{8 \cdot 9 \cdot 10}{3!} \cdot \frac{9 \cdot 10 \cdot 11 \cdot 12 \cdot 13 \cdot 14 \cdot 15}{7!} =$$

$$= \frac{8 \cdot 9 \cdot 10}{1 \cdot 2 \cdot 3} \cdot \frac{9 \cdot 10 \cdot 11 \cdot 12 \cdot 13 \cdot 14 \cdot 15}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7} = 4 \cdot 3 \cdot 10 \cdot 3 \cdot 11 \cdot 3 \cdot 13 \cdot 5 = 772200$$

Ответ: 772200.

Задание №2.

Разложить по степеням:

а) $(2+a)^7$;

б) $(a-2b)^6$;

в) $\left(1-\sqrt{3}\right)^5$;

г) $(3-i)^8$.

<u>Решение:</u>

а) $(2+a)^7$

Воспользуемся формулой бинома Ньютона:

$$(2+a)^7 = C_7^0 \cdot 2^{7-0} \cdot a^0 + C_7^1 \cdot 2^{7-1} \cdot a^1 + C_7^2 \cdot 2^{7-2} \cdot a^2 + C_7^3 \cdot 2^{7-3} \cdot a^3 +$$

$$+ C_7^4 \cdot 2^{7-4} \cdot a^4 + C_7^5 \cdot 2^{7-5} \cdot a^5 + C_7^6 \cdot 2^{7-6} \cdot a^6 + C_7^7 \cdot 2^{7-7} \cdot a^7.$$

Для подсчета числа сочетаний воспользуемся треугольником Паскаля, а именно его восьмой строчкой, состоящей из чисел:

1	7	21	35	35	21	7	1
C_7^0	C_7^1	C_7^2	C_7^3	C_7^4	C_7^5	C_7^6	C_7^7

Таким образом, получим наше разложение:

$$(2+a)^7 = 1\cdot 2^{7-0}\cdot a^0 + 7\cdot 2^{7-1}\cdot a^1 + 21\cdot 2^{7-2}\cdot a^2 + 35\cdot 2^{7-3}\cdot a^3 +$$

$$+35\cdot 2^{7-4}\cdot a^4 + 21\cdot 2^{7-5}\cdot a^5 + 7\cdot 2^{7-6}\cdot a^6 + 1\cdot 2^{7-7}\cdot a^7 =$$

$$= 1\cdot 2^7\cdot 1 + 7\cdot 2^6\cdot a^1 + 21\cdot 2^5\cdot a^2 + 35\cdot 2^4\cdot a^3 + 35\cdot 2^3\cdot a^4 + 21\cdot 2^2\cdot a^5 +$$

$$+7\cdot 2^1\cdot a^6 + 1\cdot 2^0\cdot a^7 = 2^7 + 7\cdot 2^6\cdot a + 21\cdot 2^5\cdot a^2 + 35\cdot 2^4\cdot a^3 +$$

$$+35\cdot 2^3\cdot a^4 + 21\cdot 2^2\cdot a^5 + 7\cdot 2\cdot a^6 + 1\cdot 1\cdot a^7 = 128 + 7\cdot 64a + 21\cdot 32a^2 +$$

$$+35\cdot 16a^3 + 35\cdot 8a^4 + 21\cdot 4a^5 + 14a^6 + a^7 = 128 + 448a + 672a^2 + 560a^3 +$$

$$+280a^4 + 84a^5 + 14a^6 + a^7.$$

Получили разложение:

$$(2+a)^7 = 128 + 448a + 672a^2 + 560a^3 + 280a^4 + 84a^5 + 14a^6 + a^7.$$

б) необходимо теперь разложить $(a-2b)^6$.

Аналогично получаем:

$$(a-2b)^6 = C_6^0\cdot a^{6-0}\cdot(-2b)^0 + C_6^1\cdot a^{6-1}\cdot(-2b)^1 + C_6^2\cdot a^{6-2}\cdot(-2b)^2 +$$

$$+C_6^3\cdot a^{6-3}\cdot(-2b)^3 + C_6^4\cdot a^{6-4}\cdot(-2b)^4 + C_6^5\cdot a^{6-5}\cdot(-2b)^5 + C_6^6\cdot a^{6-6}\cdot(-2b)^6$$

Для подсчета числа сочетаний воспользуемся треугольником Паскаля, а именно его седьмой строчкой, состоящей из чисел:

1	6	15	20	15	6	1
C_6^0	C_6^1	C_6^2	C_6^3	C_6^4	C_6^5	C_6^6

Получим:

$$(a-2b)^6 = 1\cdot a^{6-0}\cdot(-2b)^0 + 6\cdot a^{6-1}\cdot(-2b)^1 + 15\cdot a^{6-2}\cdot(-2b)^2 +$$

$$+20\cdot a^{6-3}\cdot(-2b)^3 + 15\cdot a^{6-4}\cdot(-2b)^4 + 6\cdot a^{6-5}\cdot(-2b)^5 + 1\cdot a^{6-6}\cdot(-2b)^6 =$$

$$= 1\cdot a^6\cdot 1 + 6\cdot a^5\cdot(-2b) \quad + 15\cdot a^4\cdot(-2b)^2 + 20\cdot a^3\cdot(-2b)^3 + 15\cdot a^2\cdot(-2b)^4 +$$

$$+6\cdot a^1\cdot(-2b)^5 + 1\cdot a^0\cdot(-2b)^6 = a^6 - 12a^5b + 15\cdot a^4\cdot 4b^2 + 20\cdot a^3\cdot(-8b^3) +$$

$$+15\cdot a^2\cdot 16b^4 + 6a\cdot(-32b^5) + 64b^6 = a^6 - 12a^5b + 15\cdot a^4\cdot 4b^2 - 20\cdot a^3\cdot 8b^3 +$$

$$+5\cdot a^2\cdot 16b^4 - 6a\cdot 32b^5 + 64b^6 = a^6 - 12a^5b + 60a^4b^2 - 160a^3b^3 + 240a^2b^4 -$$

$$-192a\ \ b^5 + 64b^6.$$

Получили разложение:

$$(a-2b)^6 = a^6 - 12a^5b + 60a^4b^2 - 160a^3b^3 + 240a^2b^4 - 192a\ \ b^5 + 64b^6.$$

в) $\left(1-\sqrt{3}\right)^5 = C_5^0\cdot 1^{5-0}\cdot\left(-\sqrt{3}\right)^0 + C_5^1\cdot 1^{5-1}\cdot\left(-\sqrt{3}\right)^1 + C_5^2\cdot 1^{5-2}\cdot\left(-\sqrt{3}\right)^2 +$

$$+C_5^3\cdot 1^{5-3}\cdot\left(-\sqrt{3}\right)^3+C_5^4\cdot 1^{5-4}\cdot\left(-\sqrt{3}\right)^4+C_5^5\cdot 1^{5-5}\cdot\left(-\sqrt{3}\right)^5.$$

Для подсчета числа сочетаний воспользуемся треугольником Паскаля, а именно его шестой строчкой, состоящей из чисел:

1	5	10	10	5	1
C_5^0	C_5^1	C_5^2	C_5^3	C_5^4	C_5^5

Получим:

$$\left(1-\sqrt{3}\right)^5=1\cdot 1^{5-0}\cdot\left(-\sqrt{3}\right)^0+5\cdot 1^{5-1}\cdot\left(-\sqrt{3}\right)^1+10\cdot 1^{5-2}\cdot\left(-\sqrt{3}\right)^2+$$

$$+10\cdot 1^{5-3}\cdot\left(-\sqrt{3}\right)^3+5\cdot 1^{5-4}\cdot\left(-\sqrt{3}\right)^4+1\cdot 1^{5-5}\cdot\left(-\sqrt{3}\right)^5=1\cdot 1^5\cdot 1+$$

$$+5\cdot 1^4\cdot\left(-\sqrt{3}\right)\ +10\cdot 1^3\cdot\left(-\sqrt{3}\right)^2+10\cdot 1^2\cdot\left(-\sqrt{3}\right)^3+5\cdot 1^1\cdot\left(-\sqrt{3}\right)^4+$$

$$+1\cdot 1^0\cdot\left(-\sqrt{3}\right)^5=1+5\cdot 1\cdot\left(-\sqrt{3}\right)\ +10\cdot 1\cdot 3+10\cdot 1\cdot\left(-3\sqrt{3}\right)\ +5\cdot 1\cdot 9+$$

$$+1\cdot 1\cdot\left(-9\sqrt{3}\right)\ =1-5\sqrt{3}+30-30\sqrt{3}+45-9\sqrt{3}=76-44\sqrt{3}.$$

Получили разложение: $\left(1-\sqrt{3}\right)^5=76-44\sqrt{3}$.

г) $(3-i)^8=C_8^0\cdot 3^{8-0}\cdot(-i)^0+C_8^1\cdot 3^{8-1}\cdot(-i)^1+C_8^2\cdot 3^{8-2}\cdot(-i)^2+$

$$+C_8^3\cdot 3^{8-3}\cdot(-i)^3+C_8^4\cdot 3^{8-4}\cdot(-i)^4+C_8^5\cdot 3^{8-5}\cdot(-i)^5+C_8^6\cdot 3^{8-6}\cdot(-i)^6+$$

$+C_8^7 \cdot 3^{8-7} \cdot (-i)^7 + C_8^8 \cdot 3^{8-8} \cdot (-i)^8$.

Для подсчета числа сочетаний воспользуемся треугольником Паскаля, а именно его девятой строчкой, состоящей из чисел:

1	8	28	56	70	56	28	8	1
C_8^0	C_8^1	C_8^2	C_8^3	C_8^4	C_8^5	C_8^6	C_8^7	C_8^8

Получим:

$(3-i)^8 = 1 \cdot 3^{8-0} \cdot (-i)^0 + 8 \cdot 3^{8-1} \cdot (-i)^1 + 28 \cdot 3^{8-2} \cdot (-i)^2 +$

$+56 \cdot 3^{8-3} \cdot (-i)^3 + 70 \cdot 3^{8-4} \cdot (-i)^4 + 56 \cdot 3^{8-5} \cdot (-i)^5 + 28 \cdot 3^{8-6} \cdot (-i)^6 +$

$+8 \cdot 3^{8-7} \cdot (-i)^7 + 1 \cdot 3^{8-8} \cdot (-i)^8 = 1 \cdot 3^8 \cdot 1 + 8 \cdot 3^7 \cdot (-i)^1 + 28 \cdot 3^6 \cdot (-i)^2 +$

$+56 \cdot 3^5 \cdot (-i)^3 + 70 \cdot 3^4 \cdot (-i)^4 + 56 \cdot 3^3 \cdot (-i)^5 + 28 \cdot 3^2 \cdot (-i)^6 +$

$+8 \cdot 3^1 \cdot (-i)^7 + 1 \cdot 3^0 \cdot (-i)^8 = 3^8 - 8 \cdot 3^7 \cdot i + 28 \cdot 3^6 \cdot (-1) \quad +$

$+56 \cdot 3^5 \cdot i + 70 \cdot 3^4 \cdot 1 + 56 \cdot 3^3 \cdot (-i) \quad + 28 \cdot 3^2 \cdot (-1) \quad +$

$+8 \cdot 3 \cdot i + 1 \cdot 1 \cdot 1 = 6561 - 8 \cdot 2187 \cdot i + 28 \cdot 729 \cdot (-1) \quad +$

$+56 \cdot 243 \cdot i + 70 \cdot 81 \cdot 1 + 56 \cdot 27 \cdot (-i) \quad + 28 \cdot 9 \cdot (-1) \quad +$

$+24 \cdot i + 1 = 6561 - 17496i - 20412 + 13608i + 5670 - 1512i - 252 + 24i + 1 =$

$= -8432 - 5376i$.

Получили разложение: $(3-i)^8 = -8432 - 5376i$.

Задания для самостоятельной работы:

Вариант №1

Задание №1.
Сколькими способами можно:
а) отобрать 5 различного цвета шариков из 12 шаров, лежащих в ящике;
б) сшить трехцветный флаг, имея 11 цветных отрезов ткани;
в) переставить 4 первых четных числа;
г) выбрать 5 женщин и 7 мужчин из группы, состоящей из 20 человек, среди которых 12 мужчин.

Задание №2.
Разложить по степеням:
а) $(4+b)^4$;
б) $(c+2d)^5$;
в) $\left(1-\sqrt{5}\right)^6$;
г) $(-1+i)^7$.

Вариант №2

Задание №1.
Сколькими способами можно:
а) отобрать четыре мелка разноцветных или одного цвета из 10 мелков, лежащих в коробке, причем в коробке находится 3 красных, 2 синих, 2 желтых и 3 зеленых мелка;
б) составить различные пятизначные телефонные номера без повторяющихся цифр, начиная с цифры 2;
в) переставить цифры 1, 3, 5, 7, 9, так, чтобы каждая цифра входила только один раз в любую перестановку;
г) выбрать для участия в забеге на дистанцию либо 2 юношей, либо 2 девушек из группы в 18 человек, среди которых 7 девушек.

Задание №2.
Разложить по степеням:
а) $(7+t)^5$;
б) $(a-b)^8$;
в) $\left(3-\sqrt{7}\right)^7$;
г) $(2-i)^6$.

Контрольные вопросы (ответьте письменно):

1. Запишите формулу для вычисления числа сочетаний из n элементов по m.
2. Запишите формулу для вычисления числа размещений из n элементов по m.
3. Запишите формулу для вычисления числа перестановок из n элементов.
4. Запишите формулу бинома Ньютона.
5. Составьте треугольник Паскаля.
6. Запишите правило сложения элементов.
7. Запишите правило умножения элементов.

Практическая работа №2

Вычисление вероятности с помощью формул комбинаторики

ЗАДАНИЕ №1. Разберите УСТНО примеры решения задач ниже.

Пример 1. В урне находится 15 белых, 5 красных и 10 чёрных шаров. Наугад извлекается 3 шара, найти вероятность того, что они будут:
а) все белыми, б) все одного цвета, в) ровно два черных.
Решение: общее количества исходов: всего в урне: 15 + 5 + 10 = 30 шаров, извлекаем три шара. Нам не важно в какой последовательности появятся эти шары. Найдем, сколько всего существует способов извлечь из урны 3 шара: сочетания 3 из 30

$$n = C_{30}^{3} = \frac{30!}{3! \cdot 27!} = \frac{28 \cdot 29 \cdot 30}{1 \cdot 2 \cdot 3} = 14 \cdot 29 \cdot 10 = 4060 \text{ способов всего}$$

Таким образом, общее число исходов: *n=4060*
а) Рассмотрим событие: А – «из урны будут извлечены 3 белых шара». Данному событию благоприятствуют m элементарных исходов – в урне всего 15 белых шаров, извлечь все три белых можно (сочетания 3 из

$$m = C_{15}^{3} = \frac{15!}{3! \cdot 12!} = \frac{13 \cdot 14 \cdot 15}{1 \cdot 2 \cdot 3} = 13 \cdot 7 \cdot 5 = 455$$

15) способами.
поэтому по классическому определению:

$$P(A) = \frac{m}{n} = \frac{455}{4060} \approx 0,11$$

– вероятность того, что из урны будут извлечены 3 белых шара.
б) Событие В –«из урны будут извлечены три шара одного цвета» - означает, что все три шара будут ЛИБО белые, ЛИБО красные, ЛИБО черные. Сначала подсчитаем, сколькими способами из урны можно по отдельности извлечь три красных и три черных шара, так как три белых шара могут быть извлечены 455 способами (см. пункт а)

$$C_{5}^{3} = \frac{5!}{3! \cdot 2!} = \frac{4 \cdot 5}{1 \cdot 2} = 2 \cdot 5 = 10$$

3 красных шара- (сочетания 3 из 5) сп.

$$C_{10}^{3} = \frac{10!}{3! \cdot 7!} = \frac{8 \cdot 9 \cdot 10}{1 \cdot 2 \cdot 3} = 4 \cdot 3 \cdot 10 = 120$$

3 черных шара- (сочетания 3 из 10) сп.
Так как в этом условии работает логическая связка ИЛИ, по правилу сложения получаем, что три белых, или три красных, или три черных шара можно извлечь 455+10+120 =585 способами, это и будет число m-благоприятных исходов.

$$P(A) = \frac{m}{n} = \frac{585}{4060} \approx 0,14$$

– вероятность того, что из урны будут извлечены 3 шара одного цвета.
в) Событие С –«из урны будут извлечены l два черных шара» - означает, что два шара будут черные, а третий ЛИБО красный, ЛИБО белый. Таким образом нас устраивает комбинации: 2 черных И 1 красный ИЛИ 2 черных И 1 белый. Сначала подсчитаем, сколькими способами из урны можно извлечь два черных шара:

$$C_{10}^2 = \frac{10!}{2!\cdot 8!} = \frac{9\cdot 10}{1\cdot 2} = 9\cdot 5 = 45$$

2 черных шара- (сочетания 2 из 10) сп.

$$C_{15}^1 = 15 \text{ способами,}$$

1 белый шар можно извлечь

$$C_5^1 = 5 \text{ способами.}$$

1 красный -

$$45\cdot 15 = 675 \text{ сп.}$$

2 черных И 1 белый –

$$45\cdot 5 = 225 \text{ сп.}$$

2 черных И 1 красный –

2 черных И 1 белый ИЛИ 2 черных И 1 красный- 675+225=900 сп.

$$P(A) = \frac{m}{n} = \frac{900}{4060} \approx 0{,}22$$

– вероятность того, что из урны будут извлечены ровно 2 черных шара.

Пример 2 .Студент знает ответы на 25 экзаменационных вопросов из 60-ти. Какова вероятность сдать экзамен, если для этого необходимо ответить не менее чем на 2 из 3-х вопросов?

Решение: итак, расклад таков: всего 60 вопросов, среди которых 25 «хороших» и, соответственно, 60 – 25 = 35 «плохих». Ситуация шаткая и не в пользу студента. Давайте узнаем, насколько хороши его шансы:

$$C_{60}^3 = \frac{60!}{57!\cdot 3!} = \frac{58\cdot 59\cdot 60}{6} = 34220$$

способами можно выбрать 3 вопроса из 60-ти *(общее количество исходов)*.

Для того чтобы сдать экзамен, нужно ответить на 2 или 3 вопроса. Считаем благоприятствующие комбинации:

$$C_{25}^2\cdot C_{35}^1 = \frac{25!}{23!\cdot 2!}\cdot 35 = \frac{24\cdot 25}{2}\cdot 35 = 10500$$

способами можно выбрать 2 «хороших» вопроса и один «плохой»;

$$C_{25}^3 = \frac{25!}{22!\cdot 3!} = \frac{23\cdot 24\cdot 25}{6} = 2300$$

способами можно выбрать 3 «хороших» вопроса.

По правилу сложения комбинаций:

$$C_{25}^2\cdot C_{35}^1 + C_{25}^3 = 10500 + 2300 = 12800$$

способами можно выбрать благоприятствующую для сдачи экзамена комбинацию 3-х вопросов *(без разницы с двумя или тремя «хорошими» вопросами)*.

По классическому определению:

$$p = \frac{C_{25}^2\cdot C_{35}^1 + C_{25}^3}{C_{60}^3} = \frac{12800}{34220} = \frac{640}{1711}$$

– вероятность того, что студент сдаст экзамен.

Ответ: $\frac{640}{1711} \approx 0{,}37$

Пример 3. Найти вероятность того, что при броске двух игральных костей произведение очков:

а) будет равно семи;

б) окажется не менее 20-ти;

в) будет чётным.

Решение: *найдём общее количество исходов:*

$C_6^1 \cdot C_6^1 = 6 \cdot 6 = 36$ *способами могут выпасть цифры на 2-х кубиках.*

а) Рассмотрим событие: A *– при броске двух игральных костей произведение очков будет равно семи. Для данного события не существует благоприятствующих исходов, по классическому определению вероятности:*

$P(A) = \frac{0}{36} = 0$ *, т.е. это событие является невозможным.*

б) Рассмотрим событие: B *– при броске двух игральных костей произведение очков окажется не менее 20-ти. Данному событию благоприятствуют следующие исходы:*

$20\ \textit{очков}: \quad (4, 5); (5, 4)$

$24\ \textit{очка}: \quad (4, 6); (6, 4)$

$25\ \textit{очков}: \quad (5, 5)$

$30\ \textit{очков}: \quad (5, 6); (6, 5)$

$36\ \textit{очков}: \quad (6, 6)$

Итого: 8 .По классическому определению:

$P(B) = \frac{8}{36} = \frac{2}{9}$ *– искомая вероятность.*

в) Рассмотрим противоположные события:

C *– произведение очков будет чётным;*

$\overline{C}$ *– произведение очков будет нечётным.*

Перечислим все исходы, благоприятствующие событию $\overline{C}$ *:*

$1\ \textit{очко}: \quad (1, 1)$

$3\ \textit{очка}: \quad (1, 3); (3, 1)$

$5\ \textit{очков}: \quad (1, 5); (5, 1)$

$9\ \textit{очков}: \quad (3, 3)$

$15\ \textit{очков}: \quad (3, 5); (5, 3)$

$25\ \textit{очков}: \quad (5, 5)$

Итого: 9 благоприятствующих исходов.

По классическому определению вероятности: $P(\overline{C}) = \frac{9}{36} = \frac{1}{4}$

Противоположные события образуют полную группу, поэтому:

$P(C) = 1 - P(\overline{C}) = 1 - \frac{1}{4} = \frac{3}{4}$ *– искомая вероятность.*

Ответ: $\text{а) } 0, \quad \text{б) } \frac{2}{9}, \quad \text{в) } \frac{3}{4}$

<u>Пример 4.</u> Ребенок имеет на руках 5 кубиков с буквами: А, К, К, Л, У. Какова вероятность того, что ребенок соберет из кубиков слово "кукла"?

Решение: Используем классическое определение вероятности: P=m/n, где n - число всех возможных элементарных исходов, m - число элементарных исходов, благоприятствующих осуществлению события.

Число различных перестановок с повторениями из букв А, К, К, Л, У равно

$$\frac{5!}{1!2!1!1!} = \frac{1*2*3*4*5}{1*2} = 60$$

, из них только одна соответствует слову "кукла" (m=1), поэтому по классическому определению вероятности вероятность того, что ребенок соберет из кубиков слово "кукла" равна P=1/60.

Ответ: 1/60.

ЗАДАНИЕ №2. Решите следующие задачи:

1. Группа туристов, состоящая из 12 юношей и 8 девушек, выбирает дежурных в составе 4 человек. Какова вероятность, что среди них будут 2 девушки?
2. В урне находится 10 шаров, из них 6 белых и 4 черных шара. Вынули из урны 2 шара. Какова вероятность того, что оба шара - белые?
3. В ящике 15 деталей, среди которых 10 окрашенных. Сборщик наудачу извлекает три детали. Найти вероятность того, что извлеченные детали окажутся окрашенными.
4. Из 5 букв разрезной азбуки составлено слово «книга». Ребенок, не умеющий читать, рассыпал эти буквы, а затем собрал их в произвольном порядке. Найдите вероятность того, что у него получится слово «книга».
5. В цехе работают шесть мужчин и четыре женщины. По табельным номерам наудачу отобраны семь человек. Найти вероятность того, что среди отобранных лиц окажутся три женщины.
6. В группе 12 студентов, среди которых 8 отличников. По списку наудачу отобраны 9 студентов. Найти вероятность того, что среди отобранных студентов пять отличников.
7. В ящике находятся 15 красных, 9 голубых и 6 зеленых шаров. Наудачу вынимают 6 шаров. Какова вероятность того, что вынуты 1 зеленый, 2 голубых и 3 красных шара.
8. В ящике находится 15 качественных и 5 бракованных деталей. Наудачу извлекаются 2 детали. Найти вероятность того, что:

а) обе детали будут качественными;
б) одна деталь будет качественной, а одна – бракованной;
в) обе детали бракованны.

Практическая работа 3

Вероятность сложных событий.

Цель работы: закрепить умения вычислять вероятности сложных событий с использованием формулы полной вероятности и формулы Байеса.

Оборудование (приборы, материалы, дидактическое обеспечение): методические рекомендации к выполнению работы; задание и инструкционная карта для проведения практического занятия

Компьютерные программы: компьютерные программы не используются

Содержание работы:

Основные понятия.

1 Формула полной вероятности: Вероятность события A, которое может произойти совместно с одной из гипотез H_1, H_2,…, H_n, образующих полную группу несовместных событий $(\sum_{i=1}^{n} P(H_i) = 1)$ равна сумме произведений вероятностей каждой из этих гипотез на соответствующие им условные вероятности события A: $P(A) = \sum_{i=1}^{n} P(H_i) \cdot P(A/H_i)$.

2 Формула Байеса: Вероятность гипотезы при условии, что событие А произошло, равна произведению вероятности этой гипотезы на соответствующую ей условную вероятность события А, которое произошло при испытании, деленному на полную вероятность события А.

$$P\left(H_i/A\right) = \frac{P(H_i) \cdot P\left(A/H_i\right)}{\sum_{i=1}^{n} P(H_i) \cdot P\left(A/H_i\right)}$$

Пример выполнения:

исходные данные: Каждый из двух стрелков независимо друг от другапроизвел выстрел по некоторому объекту. Вероятность попадания в цельпервым стрелком равна 0,7; вторым – 0,6. А) Найти вероятность того, что объект поражен одним попаданием. Б) Определить вероятность того, чтообъект поражен первым стрелком

Решение: Событие A – поражение объекта одним попаданием.

До опыта возможны следующие гипотезы: H_1 – ни один стрелок непопадет;

H_2 – первый стрелок попадет, второй – нет;

H_3 – второй стрелок попадет,первый – нет.

H_4 – оба стрелка попадут;

Вероятности этих гипотез равны: $P(H_1) = 0,3 \cdot 0,4 = 0,12$

$P(H_2) = 0,7 \cdot 0,4 = 0,28$

$P(H_3) = 0,3 \cdot 0,6 = 0,18$

$P(H_4) = 0,7 \cdot 0,6 = 0,42$

Условные вероятности события A при этих гипотезах равны:

$$P\left(\frac{A}{H_1}\right)=0;\quad P\left(\frac{A}{H_2}\right)=1;\quad P\left(\frac{A}{H_3}\right)=1;\quad P\left(\frac{A}{H_4}\right)=0.$$

После опыта гипотезы H_1 и H_4 становятся невозможными. Тогдавероятность поражения объекта вычисляется по формуле полной вероятности:

$$P(A) = P(H_3)\cdot P\left(\frac{A}{H_2}\right)+P(H_4)\cdot P\left(\frac{A}{H_3}\right)=0,28+0,18=0,46,$$

а вероятность гипотезы H_2 при условии, что объект поражен будет равна

$$P\left(\frac{H_2}{A}\right)=\frac{P(H_2)\cdot P\left(\frac{A}{H_2}\right)}{P(H_3)\cdot P\left(\frac{A}{H_2}\right)+P(H_4)\cdot P\left(\frac{A}{H_3}\right)}=\frac{0,28\cdot 1}{0,28+0,18}\approx 0,61;$$

Ответ: вероятность того, что объект поражен равна 0,46, а вероятностьпоражения первым стрелком, равна 0,61.

Задания к практической работе.Задание 1

1 В ящике содержится 12 деталей, изготовленных на заводе №1, 20 деталей - на заводе № 2 и 18 деталей - на заводе № 3. Вероятность того, что деталь, изготовленная на заводе № 1, отличного качества, равна 0,9; для деталей, изготовленных на заводах № 2 и № 3, эти вероятности соответственно равны 0,6 и 0,9. Найти вероятность того, что извлеченная деталь окажется отличного качества

2 На трех автоматических станках изготавливаются одинаковые детали. Известно, что 30% продукции производится первым станком, 25% - вторым и 45% - третьим. Вероятность изготовления детали, отвечающей стандарту, на первом станке равна 0,99 , на втором - 0,988 и на третьем - 0,98. Изготовленные в течение дня на трех станках нерассортированные детали находятся на складе. Определить вероятность того, что взятая наугад деталь не соответствует стандарту

3 В институте 40% юношей - брюнеты, 35% - блондины, 25% - рыжие. Вероятность, что студентке Красавиной понравится брюнет, равна 0,7, блондин - 0,8, рыжий - 0,6. Найти вероятность того, что наудачу выбранный студент понравится Красавиной

4 В магазин поступили электрические лампочки одного типа, изготовленные на четырех заводах: с первого завода - 250 шт.; со второго - 525 шт.; с третьего - 275 шт. и с четвертого - 950 шт. Вероятность того, что лампочка прогорит более 1 500 часов, для первого завода равна 0,15, для второго - 0,30; для третьего - 0,20 и четвертого - 0,10. При раскладке по полкам магазина лампочки были перемешаны. Какова вероятность того, что купленная лампочка прогорит более 1 500 часов?

5 С 1-го станка на сборку поступает 40 %, со 2-го – 30 %, с 3-го – 20 %, с 4-го – 10 %. Вероятности брака для каждого из станков 0,1 %, 0,2 %, 0,25 %, 0,5 % соответственно. Найти вероятность того, что поступившая на сборку деталь – бракованная.

6 При разрыве снаряда образуются 10% крупных осколков, 60% средних и 30% мелких. Вероятность пробивания брони крупным осколком – 0,7, средним – 0,2 и мелким – 0,05. Известно, что в броню попал осколок. Найти вероятность того, что броня пробита

7 На сборочное предприятие поступили однотипные комплектующие с трех заводов в количестве: 35 с первого завода, 25 со второго и 50 с третьего. Вероятность качественного изготовления изделий на первом заводе 0,8, на втором 0,7, на третьем 0,8. Какова вероятность того, что взятое случайным образом изделие окажется качественным?

8 В магазин поступила новая продукция с трех предприятий. Процентный состав этой продукции следующий: 20% - продукция первого предприятия, 30% - продукция второго предприятия, 50% - продукция третьего предприятия; далее, 10% продукции первого предприятия высшего сорта, на втором предприятии - 5% и на третьем - 20% продукции высшего сорта. Найти вероятность того, что случайно купленная новая продукция окажется высшего сорта.

9 В пирамиде установлено 5 винтовок, из которых 3 снабжены оптическим прицелом. Вероятность того, что стрелок поразит мишень при выстреле из винтовки с прицелом равна 0,95, для винтовки без прицела – 0,7. Найти вероятность того, что мишень будет поражена, если стрелок произведет один выстрел из наудачу взятой винтовки.

10 По самолету производится 3 выстрела с вероятностями попадания 0,5; 0,6; 0,8. Для вывода самолета из строя заведомо достаточно трех попаданий; при одном попадании самолет выходит из строя с вероятностью 0,3; при двух попаданиях – с вероятностью 0,6. Найти вероятность того, что в результате трех выстрелов самолет будет сбит.

11 На сборку телевизоров поступают микросхемы от двух поставщиков, причем 70% микросхем от первого поставщика, 30% – от второго. Брак микросхем первого поставщика составляет 2%, второго – 3%. Какова вероятность, что взятая наудачу микросхема окажется бракованной?

12 Известно, что в среднем 95% выпускаемой продукции удовлетворяют стандарту. Упрощенная схема контроля признает пригодной продукцию с вероятностью 0,98, если она стандартна, и с вероятностью 0,06, если она нестандартна. Определить вероятность того, что взятое наудачу изделие пройдет упрощенный контроль

13 В группе спортсменов 20 лыжников, 6 велосипедистов и 4 бегуна. Вероятность выполнить квалификационную норму такова: для лыжника— 0,9, для велосипедиста—0,8. и для бегуна—0,75. Найти вероятность того, что спортсмен, выбранный наудачу, выполнит норму

14 Пассажир может обратиться за получением билета в одну из трех касс. Вероятности обращения в каждую кассу зависят от их местоположения и равны соответственно 0,4, 0,35, 0,25. Вероятность того, что к моменту прихода пассажира имеющиеся в кассе билеты будут распроданы, равна для первой кассы 0,1, для второй – 0,2, для третьей – 0,3. Пассажир направился за билетом. Какова вероятность того, что он приобретет билет?

15 В первом ящике содержится 20 деталей, из них 15 стандартных; во втором — 30 деталей, из них 24 стандартных; в третьем — 10 деталей, из них 6 стандартных. Найти вероятность того, что наудачу извлеченная деталь из наудачу взятого ящика—стандартная

16 В двух ящиках имеется по 15 деталей, из которых по 3 бракованных, в третьем 20 деталей, из которых 2 бракованных. Какова вероятность взять бракованную деталь из наудачу выбранного ящика?

17 Илья Муромец выбирает путь. Вероятность того, что он пойдет прямо, равна 1/3, налево - ¼, в остальных случаях ему остается идти направо. На выбранном пути он встретит Соловья-Разбойника с вероятностями 1/10, 1/3 и 1/5 соответственно. Какова вероятность их встречи?

18 Закодированный текст содержит 40% А-символов и 60% В-символов. Вероятность ошибки при передаче А-символа равна 0,15, при передаче В-символа – 0,2. Найти вероятность получения ошибочногосимвола.

19 Из заготовленной для посева пшеницы зерно первого сорта составляет 40%, второго сорта – 50%, третьего сорта – 10%. Вероятность того, что взойдет зерно первого сорта равна 0,8, второго – 0,5, третьего – 0,3. Найти вероятность того, что взойдет наугад взятое зерно

20 На склад ежедневно поступают детали с трех предприятий. С первого – 30 деталей, со второго – 20, с третьего – 40. Установлено, что 2, 4 и 5 % продукции этих предприятий, соответственно имеют дефекты. Найти вероятность того, что взятая наугад деталь будет дефектна.

21 На заводе, изготовляющем болты, первая машина производит 25%, вторая - 35%, третья - 40% всех изделий. В их продукции брак составляет соответственно 5, 4 и 2%. Какова вероятность того, что случайно выбранный болт дефектный?

22 Три завода выпускают одинаковую продукцию. Первый завод выпускает 20% всей продукции, второй -30%, остальное - третий. Как правило, у первого завода 10% бракованных изделий, у второго - 15%, у третьего -5%. Найти вероятность того, что купленное изделие будет бракованным

23 В телевизионном ателье имеется 4 кинескопа. Вероятности того, что кинескоп выдержит гарантийный срок службы, соответственно равны0,8; 0,85; 0,9; 0,95. Найти вероятность того, что взятый наудачу кинескоп выдержит гарантийный срок службы

24 Старик обращается к золотой рыбке с тремя различными просьбами. Вероятность того, что он попросит новое корыто для своей старухи в первый раз, равна 0,7. Во второй и третий - 0,2 и 0,1. Вероятности исполнения просьбы рыбкой - 0,8, 0,3 и 0,1 соответственно. Какова вероятность приобретения стариком нового корыта?

25 В Скотланд-Ярде дежурят Лестрейд, Хопкинс и Грегсон. Лейстрейд забирает половину всех дел, Хопкинс и Грегсон делят остальные поровну. Вероятности раскрытия преступлений у них соответственно 0,5, 0,3, 0,4. Вместе сыщики не работают. Найти вероятность того, что наудачу выбранное преступление окажется раскрытым

26 Сборщик получил 3 коробки деталей, изготовленных заводом № 1, и 2 коробки деталей, изготовленных заводом № 2. Вероятность того, что деталь завода № 1 стандартна, равна 0,8, а завода № 2 — 0,9, Сборщик наудачу извлек деталь из наудачу взятой коробки. Найти вероятность того, что извлечена стандартная деталь

27 Для улучшения качества радиосвязи используются два радиоприемника. Вероятность приема сигнала каждым приемником равна0,8, и эти события (прием сигнала приемником) независимы. Определить вероятность приема сигнала, если вероятность безотказной работы за время сеанса радиосвязи для каждого приемника равна 0,9

28 В институте 4 факультета. На втором факультете учится в 2 раза больше студентов, чем на третьем, на третьем в 3 раза больше, чем на первом, на четвертом в 5 раз больше, чем на первом. Количество блондинок: 10% , 5% , 20% и 15% соответственно. Определить вероятность того, что студентка Глаша – блондинка

29 Три охотника вышли на охоту и встретили медведя. Вероятность попадания каждым из охотников равна 0.6. Вероятность убить медведя при одном попадании равна 0.3, при двух – 0.6, при трех выстрелах медведь наверняка убит. Какова вероятность того, что охотники вернутся с охоты с медведем, если каждый из них выстрелит по одному разу?

30 Федя пришел в тир. В шкафу находятся 5 винтовок, 3 из которых снабжены оптическим прицелом. Вероятность того, что наш стрелок поразит мишень при выстреле из обычной винтовки, равна 0,6. Оптический прицел увеличивает вероятность попадания на треть. Найти вероятность того, что Федя попал в цель.

31 В магазине три холодильника в которых заканчивается мороженое. В первом 4 белых и 6 шоколадных, во втором - 2 белых и 8 шоколадных, в третьем - 3 белых и 7 шоколадных. Наугад выбирают холодильник и вынимают из него мороженое. Определить вероятность того, что оно белое.

32 В офисе есть четыре ноутбука изготовленных компанией , 6 компанией , 8 компанией и два, которые производит . Гарантии, что ноутбуки этих компаний будут работать в течение гарантийного срока без ремонта составляют 70%, 80%, 85%, и 55% для каждой из них. Нужно найти вероятность, что выбранный ноутбук будет работать без ремонта в течение гарантийного срока.

33 На склад поступают телефоны трех заводов, причем доля телефонов первого завода составляет 25%, второго - 60%, третьего - 15%. Известно также, что средний процент телефонов без брака для первой фабрики составляет 2%, второй - 4%, третьей - 1%. Найти вероятность того, что наугад взятый телефон окажется с браком.

34 Двигатель работает в трѐх режимах: нормальном, форсированном и на холостом ходу. В режиме холостого хода вероятность его выхода из строя

равна 0,05, при нормальном режиме работы – 0,1, а при форсированном – 0,7.70% времени двигатель работает в нормальном режиме, а 20% – вфорсированном. Какова вероятность выхода из строя двигателя во времяработы?

35 На склад поступило 2 партии изделий: первая – 4000 штук, вторая – 6000 штук. Средний процент нестандартных изделий в первой партии составляет 20%, а во второй – 10%. Найти вероятность того, что наудачу взятое со склада изделие оказалось стандартным.

36 В студенческой группе 3 человека имеют высокий уровень подготовки, 19 человек – средний и 3 – низкий. Вероятности успешной сдачи экзамена для данных студентов соответственно равны: 0,95; 0,7 и 0,4. Известно, что. Какова вероятность того, что некоторый студент сдал экзамен?

37 Три организации представили в контрольное управление счета для выборочной проверки. Первая организация представила 15 счетов, вторая — 10, третья — 25. Вероятности правильного оформления счетов у этих организаций известны и соответственно равны: 0,9; 0,8; 0,85. Определить вероятность того, что выбран один счет и он оказался правильным.

Задание 2

1 В первом контейнере находится 25 деталей, среди которых 10 бракованных. Во втором находится 50 деталей, из которых 30 бракованных. В третьем контейнере - 50 деталей, среди которых 40 бракованных. Из случайно выбранного контейнера извлекается одна деталь, которая оказалась качественной. Определить вероятность того, что деталь была извлечена из первого контейнера

2 В первом контейнере находится 25 деталей, среди которых 10 бракованных. Во втором находится 50 деталей, из которых 30 бракованных. В третьем контейнере - 50 деталей, среди которых 40 бракованных. Из случайно выбранного контейнера извлекается одна деталь, которая оказалась качественной. Определить вероятность того, что деталь была извлечена из первого контейнера

3 Агрофирма закупает куриные яйца в двух домашних хозяйствах. 40% яиц из первого хозяйства — яйца высшей категории, а из второго хозяй- ства — 20% яиц высшей категории. Всего высшую категорию получает 35% яиц. Найдите вероятность того, что яйцо, купленное у этой агрофирмы, ока- жется из первого хозяйства

4 Имеются три урны: в первой из них 5 белых и 4 черных шара, во второй – 3 белых и 6 черных, в третьей – 2 белых и 7 черных. Из выбранной наугад урны вынимают шар. Он оказался черным. Найти вероятность того, что этот шар вынут из первой урны

5 Некоторое изделие выпускают тремя заводами. Объем продукции, поставляемый вторым предприятием, в 2 раза превышает соответствующие объемы продукций первого и третьего предприятий. Доля брака в среднем составляет на первом предприятии 5%, на втором - 20%, а на третьем - 10%. В продажу поступила партия данного изделия. Купленное изделие оказалось бракованным. Какова вероятность того, что оно было выпущено третьим предприятием?

6 Один из трех стрелков вызывается на линию огня и производит два выстрела. Вероятность попадания в мишень при одном выстреле для первого стрелка равна 0,3, для второго - 0,5; для третьего - 0,8. Мишень не поражена. Найти вероятность того, что выстрелы произведены первым стрелком.

7 На склад поступает продукция 3-х фабрик. Причем продукция первой фабрики составляет 20%, второй – 46% и третьей – 34%. Известно, что средний процент нестандартных изделий для первой фабрики равен 3%, для второй – 2%, для третьей – 1%. Найти вероятность того, что наудачу взятые изделия произведены на первой фабрике, если они оказались нестандартными

8 Число грузовых машин, проезжающих по шоссе, на котором стоит бензоколонка, относится к числу легковых машин, как 3:2. Вероятность того, что будет заправляться грузовая машина, равна 0,1; для легковых машин эта вероятность равна 0,2. К бензоколонке подъехала машина для заправки. Найти вероятность того, что эта машина грузовая

9 На трех станках-автоматах обрабатываются однотипные детали, поступающие после обработки на общий конвейер. Первый станок дает 2% брака, второй – 7%, третий – 10%. Производительность первого станка в 3 раза больше производительности второго, а третьего – в 2 раза меньше, чем второго. Какова доля деталей первого станка среди бракованных деталей на конвейере?

10 Два стрелка независимо друг от друга стреляют по мишени, делая каждый по одному выстрелу. Вероятность попадания в мишень для первого стрелка равна 0,8; для второго – 0,4. После стрельбы в мишени обнаружена одна пробоина. Какова вероятность того, что она принадлежит 1-му стрелку?

11 Техническое устройство выйдет из строя, если откажут не менее двух из трех независимо работающих элементов. Вероятности отказов 1-го, 2-го, 3-го элементов соответственно равны 0,2; 0,4; 0,3. Известно, что устройство отказало. Найти вероятность того, что отказали 1-й и 2-й элементы.

12 В двух ящиках имеются радиолампы. В первом ящике содержится 12 ламп, из них 1 нестандартная; во втором 10 ламп, из них 1 нестандартная. Из первого ящика наудачу взята лампа и переложена во второй. Найти вероятность того, что наудачу извлеченная из второго ящика лампа будет нестандартной.

13 Имеются три партии деталей по 30 деталей в каждой. Число стандартных деталей в первой, второй и третьей партиях соответственноравно 20, 15, 10. Из наудачу взятой партии наудачу извлечена деталь, оказавшаяся стандартной. Затем из той же партии вторично наудачу извлекли деталь, которая также оказалась стандартной. Найти вероятность того, что детали были извлечены из третьей партии

14 Компания по страхованию автомобилей разделяет водителей на три класса, которые включают 20%, 50% и 30% водителей соответственно. Вероятности того, что в течение года водитель попадет в аварию, равны 0,01, 0,03 и 0,1 соответственно для каждого класса. Наугад выбранный водитель два года подряд из пяти лет срока страховки попал в аварию. Какова вероятность того, что он относится к третьему классу?

15 Детали, изготовляемые цехом завода, попадают для проверки их на стандартность к одному из двух контролеров. Вероятность того, что деталь попадает к первому контролеру, равна 0,6, а ко второму — 0,4. Вероятность того, что годная деталь будет признана стандартной первым контролером, равна 0,94, а вторым—0,98. Годная деталь при проверке была признана стандартной. Найти вероятность того, что эту деталь проверил первый контролер.

16 На заводе, изготовляющем болты, первая машина производит 25%, вторая - 35%, третья - 40% всех изделий. В их продукции брак составляет соответственно 5, 4 и 2%. Случайно выбранный из продукции болт оказался дефектным. Какова вероятность того, что он был произведен первоймашиной?

17 Предположим, что 5 мужчин из 100 и 25 женщин из 10000 являются дальтониками. Наугад выбранное лицо страдает дальтонизмом. Какова вероятность, что это мужчина?

18 В двух пакетах по 20 конфет одинаковой формы, в первом пакете 5 конфет с начинкой, а во втором - 8. Наугад выбранная конфета оказалась с начинкой. Найдите вероятность того, что она была вынута из второго пакета.

19 Три завода выпускают одинаковую продукцию. Первый завод выпускает 20% всей продукции, второй -30%, остальное - третий. Как правило, у первого завода 10% бракованных изделий, у второго - 15%, у третьего -5%. Если известно, что купленное изделие бракованное, найти вероятность того, что это продукция второго завода.

20 Глаша пошла за кормом для своей кошки. В магазине 60% корма – это «Вискас», 25% - «Фрискас», остальное - «Китекат». Вероятность того, купленный корм понравится кошке для «Вискаса» равна 0,6; для «Фрискаса» и «Китеката» - 0,9 и 0,5 соответственно. Купленный корм понравился кошке. Какова вероятность, что это был «Фрискас»?

21 В двух ящиках имеется по 15 деталей, из которых по 3 бракованных, в третьем 20 деталей, из которых 2 бракованных. Если

известно, что деталь бракованная, какова вероятность, что она из третьей урны?

22 В первой коробке содержится 20 радиоламп, из них 18 стандартных; во второй коробке—10 ламп, из них 9 стандартных. Из второй коробки наудачу взята лампа и переложена в первую. Найти вероятностьтого, что лампа, наудачу извлеченная из первой коробки, будет стандартной.

23 На трех станках-автоматах обрабатываются однотипные детали, поступающие после обработки на общий конвейер. Первый станок дает 2% брака, второй – 7%, третий – 10%. Производительность первого станка в 3 раза больше производительности второго, а третьего – в 2 раза меньше, чем второго. Какова доля деталей второго станка среди бракованных деталей на конвейере?

24 Два стрелка независимо друг от друга стреляют по мишени, делая каждый по одному выстрелу. Вероятность попадания в мишень для первого стрелка равна 0,8; для второго – 0,4. После стрельбы в мишени обнаружена одна пробоина. Какова вероятность того, что она принадлежит 2-му стрелку?

25 Компания по страхованию автомобилей разделяет водителей на три класса, которые включают 20%, 50% и 30% водителей соответственно. Вероятности того, что в течение года водитель попадет в аварию, равны 0,01, 0,03 и 0,1 соответственно для каждого класса. Наугад выбранный водитель два года подряд из пяти лет срока страховки попал в аварию. Какова вероятность того, что он относится к первому классу?

26 Сборщик получил три коробки деталей, изготовленных заводом 1, и две коробки деталей, изготовленных заводом 2. Вероятность того, что деталь завода 1 стандартна, равна 0,9, а завода 2 - 0,8. Сборщик извлек стандартную деталь из наудачу взятой коробки. Найдите вероятность того, что она изготовлена заводом №1

27 Старик обращается к золотой рыбке с тремя различными просьбами. Вероятность того, что он попросит новое корыто для своей старухи в первый раз, равна 0,7. Во второй и третий - 0,2 и 0,1. Вероятности исполнения просьбы рыбкой - 0,8, 0,3 и 0,1 соответственно. Если старик все- таки получил новое корыто, какова вероятность, что это произошло сразу?

28 На заводе, изготовляющем болты, первая машина производит 25%, вторая - 35%, третья - 40% всех изделий. В их продукции брак составляет соответственно 5, 4 и 2%. Случайно выбранный из продукции болт оказался дефектным. Какова вероятность того, что он был произведен второймашиной?

29 На трех станках-автоматах обрабатываются однотипные детали, поступающие после обработки на общий конвейер. Первый станок дает 2% брака, второй – 7%, третий – 10%. Производительность первого станка в 3 раза больше производительности второго, а третьего – в 2 раза меньше, чем

второго. Какова доля деталей третьего станка среди бракованных деталей на конвейере?

30 (Задача Пункаре). В игорном клубе половина игроков честные, половина – шулеры. Вероятность вытащить из колоды короля равна 1/8. Для шулера эта вероятность равна 1. Сидящий перед вами игрок вытаскивает из колоды короля с первого раза. Какова вероятность, что перед вами шулер?

31 На склад поступают телефоны трех заводов, причем доля телефонов первого завода составляет 25%, второго - 60%, третьего - 15%. Известно также, что средний процент телефонов без брака для первой фабрики составляет 2%, второй - 4%, третьей - 1%. Найти вероятность того, что наугад взятый телефон с браком изготовлен на первом заводе.

32 Три организации представили в контрольное управление счета для выборочной проверки. Первая организация представила 15 счетов, вторая — 10, третья — 25. Вероятности правильного оформления счетов у этих организаций известны и соответственно равны: 0,9; 0,8; 0,85. Был выбран один счет и он оказался правильным. Определить вероятность того, что этот счет принадлежит второй организации.

33 В студенческой группе 3 человека имеют высокий уровень подготовки, 19 человек – средний и 3 – низкий. Вероятности успешной сдачи экзамена для данных студентов соответственно равны: 0,95; 0,7 и 0,4. Известно, что некоторый студент сдал экзамен. Какова вероятность того, что он был подготовлен средне?

34 В магазине три холодильника в которых заканчивается мороженое. В первом 4 белых и 6 шоколадных, во втором - 2 белых и 8 шоколадных, в третьем - 3 белых и 7 шоколадных. Наугад выбирают холодильник и вынимают из него мороженое. Определить вероятность того, что белое мороженое извлекли из второго холодильника.

35 В офисе есть четыре ноутбука изготовленных компанией A , 6 компанией B, 8 компанией C и два, которые производит D. Гарантии, что ноутбуки этих компаний будут работать в течение гарантийного срока без ремонта составляют 70%, 80%, 85%, и 55% для каждой из них. Нужно найти вероятность, что выбранный исправный ноутбук принадлежит к компаниям C и D.

36 Двигатель работает в трѐх режимах: нормальном, форсированном и на холостом ходу. В режиме холостого хода вероятность его выхода из строя равна 0,05, при нормальном режиме работы – 0,1, а при форсированном – 0,7. 70% времени двигатель работает в нормальном режиме, а 20% – в форсированном. Какова вероятность того, что во время работы двигатель выйдет из строя при форсированном режиме работы?

37 На склад поступило 2 партии изделий: первая – 4000 штук, вторая – 6000 штук. Средний процент нестандартных изделий в первой партии

составляет 20%, а во второй – 10%. Наудачу взятое со склада изделиеоказалось стандартным. Найти вероятность того, что оно из первой партии.

Контрольные вопросы:

1 Что такое сложное событие?2 Что такое гипотеза?
3 Формула полной вероятности4 Формула Байеса

Практическое занятие № 4,5:
Вычисление основных числовых характеристик ДСВ.

Порядок выполнения задания, методические указания: - ознакомиться с теоретическими положениями по данной теме; - изучить схему решения задач; - выполнить задания практической работы; - сформулировать вывод

Содержание отчета: отчет по практической работе должен содержать: рассуждения по решению задач, необходимые вычисления, ответ;вывод по работе

Характеристики дискретной случайной величины

1) **Математическим ожиданием M (X)** дискретной случайной величины X называется сумма произведений всех возможных значений величины X на соответствующие вероятности: $M(X) = x_1 \cdot p_1 + x_2 \cdot p_2 + \ldots + x_n \cdot p_n$.

Рассмотрим свойства математического ожидания:

1. Математическое ожидание имеет ту же размерность, что и сама случайная величина.

2. Математическое ожидание может быть как положительным, так и отрицательным числом.

3. Математическое ожидание постоянной величины C равно этой постоянной, т.е. $M(C) = C$.

4. Математическое ожидание суммы нескольких случайных величин равно сумме математических ожиданий этих величин, т.е.
$M(X + Y + \ldots + W) = M(X) + M(Y) + \ldots + M(W)$.

5. Математическое ожидание произведения двух или нескольких взаимно независимых случайных величин равно произведению математических ожиданий этих величин, т.е. $M(XY) = M(X) \times M(Y)$.

6. Математическое ожидание произведения случайной величины на постоянную C равно произведению математического ожидания случайной величины:
$M(CX) = C\times M(X)$.

2) **Дисперсией D (X)** дискретной случайной величины X называется математическое ожидание квадрата отклонения случайной величины X от ее математического ожидания: $D(X) = M\,[X – M(X)]^2$.

Формула D(X) после возведения в степень и преобразований имеет вид:$D(X) = M\,(X^2) – [M(X)]^2$.
Дисперсия имеет размерность, равную квадрату размерности случайной вели-чины.

Свойства дисперсии:

1. Дисперсия постоянной величины всегда равна нулю: $D(C) = 0$.

2. Постоянный множитель можно выносить за знак дисперсии, предварительно возведя его в квадрат: $D(CX) = C^2\,D(X)$.

3. Дисперсия алгебраической суммы двух независимых случайных величин равна сумме их дисперсией: $D(X +Y) = D(X) + D(Y)$.

3) Средним квадратическим отклонением s (X) случайной величины X называется корень квадратный из ее дисперсии: $\sigma(X) = \sqrt{D(X)}$

Среднее квадратическое отклонение имеет ту же размерность, что и случайная величина.

Случайная величина называется центрированной, если математическое ожида- ние M(X)=0, и стандартизированной, если M(X)=0 и среднее квадратическое откло- нение s=1.

Пример 1. Найти математическое ожидание M(X), дисперсию D(X) и среднее квад-ратическое отклонение s(X) дискретной случайной величины X, заданной законом распределения в таблице 1:

Таблица 1

X	-5	2	3	4
p	0,4	0,3	0,1	0,2

Решение. Математическое ожидание X вычисляется по формуле: $M(X) = -5\times 0,4 + 2\times 0,3 + 3\times 0,1 + 4\times 0,2 = -0,3$.

Дисперсия вычисляется по формуле:

$$D(X) = M(X^2) - [M(X)]^2,$$

Закон распределения X^2 представлен в таблице 2:

Таблица 2

X^2	25	4	9	16
p	0,4	0,3	0,1	0,2

Математическое ожидание X^2:

$$M(X^2) = 25\times0,4 + 4\times0,3 + 9\times 0,1 + 16\times0,2 = 15,3.$$

Искомая дисперсия:

$$D(X) = M(X^2) - [M(X)]^2 = 15,3 -(-0,3)^2 = 15,21.$$

Тогда среднее квадратическое отклонение будет:

$$\sigma(X) = \sqrt{D(X)} = \sqrt{15,21} = 3,9 .$$

Пример 2. Независимые случайные величины X и Y заданы следующими законамираспределения:

X	5	2	4
P	0,6	0,1	0,3

Y	7	9
P	0.8	0.2

Найти математическое ожидание случайной величины XY.

Решение.

M(X) = 5*0,6 + 2*0,1 + 4*0,3 = 4,4M(Y) = 7*0,8 +
9*0,2 = 7,4
M(XY) = 4,4*7,4=32,56

Пример 3. Производится 3 выстрела с вероятностями попадания в цель, равными $p_1= 0,4$; $p_2= 0,3$; $p_3 = 0,6$. Найти математического ожидание общего числа попаданий.*Решение.* Число попаданий при первом выстреле есть случайная величина X_1, кото- рая может принимать только два значения: 1 – попадание с вероятностью 0,4 и 0 – промах с вероятностью 0,6.

$M(X_1) = 0,4$

Аналогично $M(X_2) = 0,3$; $M(X_3) = 0,6$.

Общее число попаданий есть случайная величина, состоящая из суммы попа-даний в каждом из выстрелов: $X=X_1+X_2+X_3$.

$$M(X) = M(X_1+X_2+X_3) = M(X_1) + M(X_2) + M(X_3) = 1{,}3 \text{ попаданий.}$$

Пример 4. Вероятность попадания в цель при стрельбе из орудия p=0,6. Найти ма- тематическое ожидание общего числа попаданий, если будет произведено 10 вы- стрелов.

Решение. Попадание при каждом выстреле не зависит от исходов других выстрелов, поэтому рассматриваемые события независимы и, следовательно, искомое матема- тическое ожидание M(X) = np = 10*0.6 = 6 попаданий.

Пример 5. Найти дисперсию случайной величины X, которая задана следующим за-коном распределения:

X	2	3	5
p	0,1	0,6	0,3

Решение. Найдем математическое ожидание M(X): M (X)=2*0,1+3*0,6+5*0,3+3,5Математическое ожидание $M(X^2)$=4*0,1+9*0,6+25*0,3=13,3

Искомая дисперсия: $D(X)=M(X^2)-[M(X)]^2=13{,}3-(3{,}5)^2=1{,}05$

Задания для индивидуальной работы:

Задание №1. Найдите математическое ожидание M(X), дисперсию D(X) и среднеквадратичное отклонение δ (X).

Вариант 1.

X	-1	-2	-3	-10	-12	-20	-30	-40
P	0,1	0,1	0,1	0,09	0,3	0,009	0,3	0,001

Вариант 2.

X	-1	-2	-3	-10	-12	-20	-30	-40
P	0,2	0,3	0,2	0,06	0,1	0,006	0,1	0,034

Вариант 3.

X	-1	-2	-3	-10	-12	-20	-30	-40
P	0,1	0,3	0,1	0,005	0,1	0,005	0,3	0,09

Вариант 4.

X	-1	-2	-3	-10	-12	-20	-30	-40
P	0,2	0,4	0,1	0,002	0,1	0,09	0,1	0,008

Вариант 5.

X	-1	-2	-3	-10	-12	-20	-30	-40
P	0,1	0,2	0,1	0,008	0,2	0,09	0,3	0,002

Вариант 6.

X	-1	-2	-3	-10	-12	-20	-30	-40
P	0,3	0,2	0,1	0,003	0,2	0,095	0,1	0,002

Задание №2. Дискретные независимые случайные величины заданы законами рас-пределения. Найти математическое ожидание произведения M (XY) и M (2Y).

Вариант 1.

X	1	2
p	0,2	0,8

Y	0,5	1
p	0,3	0,7

Вариант 2.

X	2	1
p	0,6	0,4

Y	1	1,25
p	0,8	0,2

Вариант 3.

X	3	2
p	0,7	0,3

Y	0,65	2
p	0,5	0,5

Вариант 4.

X	1	3
p	0,1	0,9

Y	1	1,35
p	0,4	0,6

Вариант 5.

X	2	4
p	0,4	0,6

Y	2	1,85
p	0,8	0,2

Вариант 6.

X	1	4
p	0,5	0,5

Y	0,4	1
p	0,9	0,1

Задание №3.

Вариант 1. Производится 4 выстрела с вероятностью по падения в цель p_1=0,6 p_2=0,4, p_3=0,5 и p_4=0,7. Найти математическое ожидание общего числа попадания.***Вариант 2***. Производится 4 выстрела с вероятностью по падения в цель p_1=0,3 p_2=0,4, p_3=0,6 и p_4=0,5. Найти математическое ожидание общего числа попадания.***Вариант 3***. Производится 4 выстрела с вероятностью по падения в цель p_1=0,1 p_2=0,2, p_3=0,6 и p_4=0,9. Найти математическое ожидание общего числа попадания.***Вариант 4***. Производится 4 выстрела с вероятностью по падения в цель p_1=0,7 p_2=0,2, p_3=0,8 и p_4=0,5. Найти математическое ожидание общего числа попадания.***Вариант 5***. Производится 4 выстрела с вероятностью по падения в цель p_1=0,5 p_2=0,4, p_3=0,9 и p_4=0,2. Найти математическое ожидание общего числа попадания.***Вариант 6***. Производится 4 выстрела с вероятностью по падения в цель p_1=0,3 p_2=0,7, p_3=0,3 и p_4=0,5. Найти математическое ожидание общего числа попадания.

Задание №4.

Вариант 1. Вероятность отказа детали за время испытания на надежность равна 0,2.Найти математическое ожидание числа отказавших деталей, если испытанию будут подвергнуты 10 деталей.

Вариант 2. Вероятность отказа детали за время испытания на надежность равна 0,3.Найти математическое ожидание числа отказавших деталей, если испытанию будут подвергнуты 12 деталей.

Вариант 3. Вероятность отказа детали за время испытания на надежность равна 0,7.Найти математическое ожидание числа отказавших деталей, если испытанию будут подвергнуты 15 деталей.

Вариант 4. Вероятность отказа детали за время испытания на надежность равна 0,9.Найти математическое ожидание числа отказавших деталей, если испытанию будут подвергнуты 18 деталей.
Вариант 5. Вероятность отказа детали за время испытания на надежность равна 0,8.Найти математическое ожидание числа отказавших деталей, если испытанию будут подвергнуты 6 деталей.
Вариант 6. Вероятность отказа детали за время испытания на надежность равна 0,2.Найти математическое ожидание числа отказавших деталей, если испытанию будут подвергнуты 20деталей.

Задание №5

Вариант 1. Найти дисперсию случайной величины X – числа появлений события в 100 независимых испытаниях, в каждом из которых вероятность наступления собы- тия равна 0,7.
Вариант 2. Найти дисперсию случайной величины X – числа появлений события в 130 независимых испытаниях, в каждом из которых вероятность наступления собы- тия равна 0,6
Вариант 3. Найти дисперсию случайной величины X – числа появлений события в 150 независимых испытаниях, в каждом из которых вероятность наступления собы- тия равна 0,2.
Вариант 4. Найти дисперсию случайной величины X – числа появлений события в 200 независимых испытаниях, в каждом из которых вероятность наступления собы- тия равна 0,4.
Вариант 5. Найти дисперсию случайной величины X – числа появлений события в 400 независимых испытаниях, в каждом из которых вероятность наступления собы- тия равна 0,8.
Вариант 6. Найти дисперсию случайной величины X – числа появлений события в 250 независимых испытаниях, в каждом из которых вероятность наступления собы- тия равна 0,3.

Задание №6

Вариант 1. Случайная величина X может принимать два возможных значения x_1 свероятностью 0,3 и x_2 с вероятностью 0,7, причем $x_2 > x_1$. Найти x_1 и x_2, зная, что M(X) = 2,7 и D (X) = 0,21.
Вариант 2. Случайная величина X может принимать два возможных значения x_1 с вероятностью 0,4 и x_2 с вероятностью 0,6, причем $x_1 > x_2$. Найти x_1 и x_2, зная, что M (X) = 3,4 и D (X) = 0,24.

Контрольные вопросы:

1. Дать определение математического ожидания
2. Что показывает дисперсия случайной величины?
3. Как найти среднее квадратичное отклонение?

ПРАКТИЧЕСКОЕ ЗАНЯТИЕ № 6

Тема: **Вычисление числовых характеристик для НСВ . Построение функции плотности и интегральной функции распределения**

Цель практической работы:

- закрепить методику вычисления вероятностей, характеристик НСВ с помощью функции плотности и интегральной функции распределения.
- научиться вычислять математическое ожидание, дисперсию и среднее квадратическое отклонение НСВ по её функции плотности, находить медиану и моду.

Материально – техническое оснащение рабочего места:

- учебно - методическая литература

Форма контроля знаний: самостоятельная работа

Содержание и последовательность выполнения заданийВопросы для самопроверки

1. Что такое плотность распределения? Свойства плотности.
2. Вероятность смысл плотности.
3. Что такое математическое ожидание НСВ? Формула вычисления.
4. Что такое дисперсия НСВ? Формула вычисления.
5. Что такое среднее квадратическое отклонение НСВ? Формула вычисления.

Самостоятельная
работаВариант №1

1. Дана функция распределения непрерывной случайной величины X:

$$F(x)=\begin{cases}0, & при \quad x<0\\ \sin 2x, & при \quad 0\le x\le \dfrac{\pi}{4};\\ 1, & при \quad x>\dfrac{\pi}{4}\end{cases}$$

Найти плотность распределения *f(x)*.

2. Задана плотность распределения непрерывной случайной величины X:

$$f(x)=\begin{cases}0, & при \quad x<1\\ x-0{,}5, & при \quad 1\le x\le 2;\\ 0, & при \quad x>2\end{cases}$$

Найти функцию распределения *F(x)*. Построить графики обоих функций.
Найти вероятность того, что X примет значение, принадлежащее интервалу (1,5; 2).

3. Задана плотность распределения непрерывной случайной величины X:

$$f(x)=\begin{cases}0, & при \quad x<0\\ \dfrac{2}{3}x, & при \quad 0\le x\le 2;\\ 0, & при \quad x>2\end{cases}$$

Найти математическое ожидание, дисперсию и среднее квадратическое отклонение.

4. Для распределения из задания 1 найти моду и медиану.

Вариант №2

1. Дана функция распределения непрерывной случайной величины X:

$$F(x) = \begin{cases} 0, & \text{при} \quad x < 0 \\ \cos 2x, & \text{при} \quad 0 \le x \le \dfrac{\pi}{2}; \\ 1, & \text{при} \quad x > \dfrac{\pi}{2} \end{cases}$$

Найти плотность распределения *f(x)*.

2. Задана плотность распределения непрерывной случайной величины X:

$$f(x) = \begin{cases} 0, & \text{при} \quad x < 1 \\ 0{,}5 - x, & \text{при} \quad 1 \le x \le 3; \\ 0, & \text{при} \quad x > 3 \end{cases}$$

Найти функцию распределения *F(x)*. Построить графики обоих функций.
Найти вероятность того, что X примет значение, принадлежащее интервалу (1; 2,5).

3. Задана плотность распределения непрерывной случайной величины X:

$$f(x) = \begin{cases} 0, & \text{при} \quad x < 1 \\ 3x, & \text{при} \quad 1 \le x \le 2; \\ 0, & \text{при} \quad x > 2 \end{cases}$$

Найти математическое ожидание, дисперсию и среднее квадратическое отклонение.

4. Для распределения из задания 1 найти моду и медиану.

Вариант №3

1. Дана функция распределения непрерывной случайной величины X:

$$F(x) = \begin{cases} 0, & \text{при} \quad x < 0 \\ \sin 3x, & \text{при} \quad 0 \le x \le \dfrac{\pi}{4}; \\ 1, & \text{при} \quad x > \dfrac{\pi}{4} \end{cases}$$

Найти плотность распределения *f(x)*.

2. Задана плотность распределения непрерывной случайной величины X:

$$f(x) = \begin{cases} 0, & \text{при} \quad x < 1 \\ 2x - 0{,}5, & \text{при} \quad 1 \le x \le 2; \\ 0, & \text{при} \quad x > 2 \end{cases}$$

Найти функцию распределения *F(x)*. Построить графики обоих функций.
Найти вероятность того, что X примет значение, принадлежащее интервалу (1,5; 2).

3. Случайная величина X задана плотностью распределения $f(x) = 2x$ на интервале (0;1), а вне этого интервала $f(x) = 0$. Найти математическое ожидание, дисперсию и среднее квадратическое отклонение.
4. Для распределения из задания 1 найти моду и медиану.

Вариант №4
1. Дана функция распределения непрерывной случайной величины X:

$$F(x)=\begin{cases}0, & при \quad x<0\\ \cos 3x, & при \quad 0\le x\le \frac{\pi}{2};\\ 1, & при \quad x>\frac{\pi}{2}\end{cases}$$

Найти плотность распределения *f(x)*.

2. Задана плотность распределения непрерывной случайной величины X:

$$f(x)=\begin{cases}0, & при \quad x<1\\ 1{,}5-x, & при \quad 1\le x\le 3;\\ 0, & при \quad x>3\end{cases}$$

Найти функцию распределения *F(x)*. Построить графики обоих функций.
Найти вероятность того, что X примет значение, принадлежащее интервалу (1; 2,5).

3. Случайная величина X задана плотностью распределения $f(x) = 1/2x$ на интервале (0;2), а вне этого интервала $f(x) = 0$. Найти математическое ожидание, дисперсию и среднее квадратическое отклонение.

4. Для распределения из задания 1 найти моду и медиану.

Время на выполнение: 45 минут

Перечень объектов контроля и оценки

Наименование объектов контроля и оценки	Основные показатели оценки результата	Оценка
У 1. Применять стандартные методы и модели к решению вероятностных и статистических задач	- Вычисление вероятности по формулам Байеса и полной вероятности	
З 2. Основы теории вероятностей и математической статистики	- Формулировка теоремы Байеса, полной вероятности	

За верное решение задачи выставляется положительная оценка –1балл
За неверное решение задачи выставляется отрицательная оценка – 0 баллов.

ПРАКТИЧЕСКОЕ ЗАНЯТИЕ № 7

Расчёт по заданной выборке её числовых характеристик.

Цель практической работы:

– решать задачи на расчет числовых характеристик

Материально – техническое оснащение рабочего места:

– учебно - методическая литература

Форма контроля знаний: практическое выполнение заданий, самостоятельная работа

Содержание и последовательность выполнения заданийМатематический

диктант (выполнение тестов)

1. Отличаются ли размерности первичной статистической совокупности и упорядоченной статистической совокупности?

а) Да; б) Нет.

Ответ: б) Нет.

2. Статистическую функцию распределения легче построить по:

а) упорядоченной статистической совокупности;

б)группированному статистическому ряду.

Ответ: б.

3. Гистограмма является статистическим аналогом следующей характеристики случайной величины:

а) кривой распределения (плотности распределения);б) функции распределения.

Ответ: а.

4. Найти значения статистической функции распределения по данным следующего группированного ряда:

Разряды	0,006944	0,430556	0,854167	1,277778
Частота	0,1	0,35	0,5	0,05

Ответ: F*(x)=0; F*(10)=0,1; F*(20)=0,45; F*(30)=0,95; F*(40)=1.

2. Оценка числовых характеристик случайных величин по их ограниченной выборке

Численные значения ($p^*, m_x^*, \delta_x^2, K_{xy}^*,$ ....) характеристик (........$p, m_x, \delta_x^2, K_{xy},$......) случайных величин, получаемых в результате обработки результатов эксперимента (опыта),называются оценками указанных характеристик.

Так как результат эксперимента случаен, то и любая оценка является случайной

величиной. Чтобы случайная оценка α^* наилучшим образом оценивала исходную характеристику α случайной величины, она должна быть несмещенной, состоятельной иэффективной.

Несмещенной называется такая оценка α^*, математическое ожидание которой равнооцениваемой характеристике α:

$$M\left[\alpha^*\right] = \alpha \cdot$$

Состоятельной называется такая оценка α^*, чтобы при увеличении числа опытов (объемавыборки) n она приближалась (сходилась по вероятности) к исходному значению α:

$$\alpha^* \underset{P}{\overset{n\to\infty}{\longrightarrow}} \alpha \,.$$

Эффективной называется такая несмещенная оценка α^*, которая обладает по сравнению с другими минимальной дисперсией:

$$D(\alpha^*) = \min \cdot$$

На практике не всегда удается удовлетворить всем этим требованиям. Например, иногдаформулы для вычисления эффективной оценки очень сложны, и приходится удовлетворяться другой оценкой, дисперсия которой несколько больше.

Естественной оценкой для математического ожидания m_x^* случайной величины X является среднее арифметическое элементов выборки (статистически среднее):

$$m_x^* = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i = a + \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i - a),$$

где a - новое начало отсчета, вводимое для удобства расчетов.

Можно показать, что эта оценка является несмещенной, состоятельной, а для гауссовогозакона распределения и эффективной.

В случае неравноточных измерений оценкой математического ожидания m_x случайной величины x служит средневзвешенное результатов и опытов:

$$m_x = \frac{\sum_{i=1}^{n} g_i x_i}{\sum_{i=1}^{n} g_i}$$

где g_i - числа, пропорциональные квадратам среднеквадратичных отклонений δ_{x_i} -го опыта (g_i = $\frac{1}{\delta_{x_i}^{e}}$, i= 1, 2,. ...... , n)

Несмещенная оценка дисперсии при неизвестном математическом ожидании:

$$\delta_x^{*2} = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(x_i - m_x^*)^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(x_i - a)^2 - \frac{n}{n-1}(m_x^* - a)^2 .$$

Иногда удобно использовать выражение для оценки дисперсии следующего вида:

$$\delta_x^{*2} = \left[\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i^2 - m_x^{*2}\right]\frac{n}{n-1}.$$

При большом значении n поправочный множитель $\frac{n}{n-1}$ становится близким к единице его перемещение теряет смысл.

Несмещенная, состоятельная оценка корреляционного момента случайных величин имеетвид:

Корреляционный момент можно вычислить и по равносильной формуле:

$$K_{xy}^* = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(x_i - m_x^*)(y_i - m_y^*).$$

$$K_{xy}^* = \left[\frac{1}{n}\sum x_i y_i - m_x^* m_y^*\right] * \frac{n}{n-1}.$$

Оценка коэффициент корреляции:

$$\rho_{XY}^* = \frac{K_{XY}^*}{\sigma_X^* \sigma_Y^*}.$$

При известных математических ожиданиях m_X, m_Y оценками дисперсии и корреляционного момента являются:

$$\sigma_X^{*2} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i - m_X)^2;$$

$$\sigma_Y^{*2} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(y_i - m_Y)^2;$$

$$K_{XY}^* = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i - m_X)(y_i - m_Y).$$

Пример. Произведено 10 фиксаций курса валюты X и валюты У. Результаты (в условныхединицах) сведены в таблицу:

i	1.	2.	3.	4.	5.	6.	7.	8.	9.	10.
x_i	1.8	1.85	1.85	1.7	1.72	1.77	1.8	1.83	1.89	1.89
y_i	1.5	1.5	1.45	1.5	1.6	1.6	1.55	1.5	1.55	1.55

Найти оценки для числовых характеристик системы случайных величин (X,У).

$$m_X^* = \frac{1}{10}\sum_{i=1}^{10} x_i = 1{,}81;$$
$$m_Y^* = \frac{1}{10}\sum_{i=1}^{10} y_i = 1{,}53;$$
$$\sigma_X^{*2} = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{10} (x_i - m_X^*)^2 = 0{,}00427;$$

Решение:

$$\sigma_Y^{*2} = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{10} (y_i - m_Y^*)^2 = 0{,}00233;$$
$$K_{XY}^* = \left[\frac{1}{10}\sum_{i=1}^{10} x_i y_i - m_X^* m_Y^*\right]\frac{10}{9} = -0{,}0015;$$

$$\sigma_{XY}^* = \frac{K_{XY}^*}{\sigma_X^* * \sigma_Y^*} = -0{,}476.$$

Мы видим, что между курсами валют X и У существует корреляционная связь (причемотрицательная: увеличение курса одной валюты уменьшает другой).

Часто на практике возникает задача не только определения оценок числовых характеристик случайных величин по их ограниченной выборке но и ориентировочнаяоценка их точности и надежности. Нас интересует, с какой вероятностью можно

утверждать, что допущенная при оценке ошибка не превзойдет некоторой величины ε ?

Обозначим эту вероятность β:

$$\beta = \mathbf{P}(|\alpha^* - \alpha| < \varepsilon).$$

Вероятность β называется доверительной вероятностью:

границы $\alpha^* - \varepsilon, \alpha^* + \varepsilon$ - доверительными границами;

интервал $\alpha^* \pm \varepsilon$ - доверительным интервалом.

Вероятность α характеризует надежность оценки, а величина ε - ее точность. Может быть поставлена и другая задача, а именно каков должен быть доверительный

интервал, для того, чтобы с заданной вероятностью β можно было утверждать, что истинное значение искомой характеристики не выйдет за пределы этого интервала? Чтобы оценить точность и надежность оценки, нужно знать ее закон распределения. Согласно центральной предельной теоремы теории вероятностей, он во многих случаяхоказывается близким к гауссовому.

Допуская, что оценка математического ожидания m^* есть случайная величина с

гауссовым распределением и с параметрами $m_X^*, \sigma_m^* = \sqrt{\frac{\sigma_X^2}{n}}$, находим приближенно

вероятность того, что оценка m^* отклоняются от своего математического ожиданияменьше, чем на ε:

$$\mathbf{P}(|m^* - m| < \varepsilon) \approx \Phi(\frac{\varepsilon}{\sigma_m^*}),$$ где Ф(x) - функция Лапласа.

Пример. При обработке результатов n=20 независимых опытов получены оценки $m_X^* = 4{,}52, \sigma_X^* = 2{,}35.$ Найти вероятность того, что , пологая $m_X = m_X^* = 4{,}52,$ мы не совершим ошибки, большей, чем $\varepsilon = 0{,}3.$

Решение: Находим $\sigma_m^* = \sqrt{\frac{\sigma_X^{*2}}{n}} = \sqrt{\frac{2{,}35}{20}} \approx 0{,}343.$

Тогда $\mathbf{P}(|m_X^* - m| < 0{,}3) = \Phi(\frac{0{,}3}{0{,}343}) \approx 2 * 0{,}3093 \approx 0{,}618.$

Итак, вероятность того, что ошибка от замены m_X на m_X^* не превзойдет 0,3, не настолько велика, чтобы считать это событие практически достоверным.

Если задана доверительная вероятность β (на практике ее берут от 0,8 до 0,999), то из уравнения

$$\Phi(\frac{\varepsilon\sqrt{n}}{\sigma_X^*}) = \beta,$$

находим $\varepsilon = t_\beta \frac{\sigma_X^*}{\sqrt{n}},$ где значение t $_\beta$ удовлетворяет равенству $\Phi(t_\beta) = \beta.$

Пример. Произведено 16 изменений случайной величины X. Вычисленные по результатамизмерений оценки характеристик случайной величины X следующее:

$$m_X^* = 5; \sigma_X^{*2} = 3{,}06.$$

Определить доверительный интервал для математического ожидания с надежностью 0,9.Решение: Из таблицы

функции Лапласа, определяем, что если $\Phi(t_\beta) = 0{,}45$, то $t_\beta = 0{,}59.$

Тогда $\varepsilon = t_\beta \frac{\sigma_X^*}{\sqrt{n}} = 0{,}59 * \frac{1{,}75}{\sqrt{16}} = 0{,}2625.$

Таким образом, интервал $[4{,}7375; 5{,}2625]$ накрывает точку m_X с вероятностью 0,9.Для

дисперсии приближенное значение ε может быть вычислено по формуле:

$\varepsilon = t_\beta * \sqrt{\frac{2}{n-1}} * \sigma_X^*,$ а для корреляционного момента: $\varepsilon = t_\beta * \sqrt{\frac{\sigma_X^{*2} * \sigma_Y^{*2} - K_{XY}^*}{n-1}}.$

Приведенные формулы для определения доверительного интервала дают хорошие результаты для оценки математического ожидания при $n \geq 10\ldots20,$ а для дисперсии и корреляционного момента - при n>20...30.

При меньшем числе опытов результаты получаются приближенными.

В заключение приведем оценку вероятности события. Пусть произведено n независимыхопытов, в которых событие A появилось m раз. Требуется оценить вероятность этого события p. Несмещенной и состоятельной оценкой вероятности события является его частота

$$p^* = \frac{m}{n}.$$

Вероятность того, что ошибка оценки вероятности события не превысит $\varepsilon.$

$$P(|p^* - p < \varepsilon|) = \Phi(\frac{\varepsilon}{\sigma_P^*}),$$, где $\sigma_P^* = \sqrt{D[p^*]} = \sqrt{\frac{\sigma_X^2}{n}} = \sqrt{\frac{pq}{n}};$ $q = 1 - p.$

В большинстве практических задач вероятность p заранее неизвестна, поэтому ее заменяют приближенным значением p^*. Тогда получаем приближенную формулу для определения доверительной вероятности:

$$P(|p^* - p| < \varepsilon) \approx \Phi\left(\frac{\varepsilon\sqrt{n}}{\sqrt{p^* q^*}}\right).$$

Необходимое число опытов для получения оценки вероятности события с доверительнойвероятностью и доверительным интервалом β определяется из формулы:

$$n = \frac{p_1^* q_1^*}{\varepsilon^2} * t_\beta^2,$$

где t_β определяется исходя из равенства $\Phi(t_\beta) = \beta,$ $p_1^* -$ частота событий в первой серии опытов; $q_1^* = 1 - p_1^*.$

Здесь, как видим, вместо p^* используется p_1^*. Это обусловлено тем, что вопрос о необходимом числе опытов поставлен до их проведения.

Пример. При 600 бросаниях монеты герб выпал 312 раз. Найти вероятность того, чтоошибка от замены вероятности частотой не превысит $\varepsilon = 0{,}05.$

Решение: Оценка вероятности $p = \frac{312}{600} = 0{,}52.$

Тогда $q^* = 1 - p^* = 0{,}48.$

Искомая вероятность $P(|p^* - p| < 0,05) = \Phi\left(\frac{0,05 * 24,49}{0,499}\right) \approx \Phi(2,45) \approx 0,986.$

Итак, с довольно высокой вероятностью 0,986 можно утверждать, что при n=600бросаниях монеты ошибка от замены вероятности частотой не превысит 0,05.

6. Тестовое задание по теме: «Вероятности случайных событий»

1. Упорядоченное множество, отличающееся только порядком элементов, называется

a) перестановкой
b) размещением
c) сочетанием
d) затрудняюсь ответить

2. Упорядоченное подмножество из n элементов по m элементов, отличающиеся друг от друга либо самими элементами либо порядком их расположения, называется …

a) сочетанием
b) размещением
c) перестановкой
d) затрудняюсь ответить

3. … из n элементов по m называется любое подмножество из m элементов, которые отличаются друг от друга по крайней мере одним элементом.

a) перестановкой
b) размещением
c) сочетанием
d) затрудняюсь ответить

4. Событие, которое обязательно произойдет, называется …

a) невозможным
b) достоверным
c) случайным
d) затрудняюсь ответить

5. Событие называется …, если оно не может произойти в результате данного испытания.

a) случайным
b) невозможным
c) достоверным
d) затрудняюсь ответить

—

d) затрудняюсь ответить

6. Событие А и A называется …, если непоявление одного из них в результате данного испытания влечет

d) затрудняюсь ответить

появление другого.

a) совместимым
b) несовместимым
c) противоположным
d) затрудняюсь ответить

7. Число постановок определяется формулой
Pn=n!

a) $C_n^m = \frac{n!}{(n-m)!m!}$
b) затрудняюсь ответить
c) $A_n^m = \frac{n!}{(n-m)!}$

8. Число сочетаний определяется формулой

a) $C_n^m = \frac{n!}{(n-m)!}$
b) $C_m^n = \frac{n!}{(n-m)!}$
c) $C_n^m = \frac{n!}{(n-m)!m!}$

9. Вероятность достоверного события равна

a) >1
b) 1
c) 0
d) затрудняюсь ответить

10. Вероятность невозможного события равна

a) >1
b) 1
c) 0
d) затрудняюсь ответить

11. Отношение числа испытаний, в которых событие появилось, к общему числу фактически произведенных испытаний называется

a) классической вероятностью
b) относительной частотой
c) затрудняюсь ответить
d) геометрической вероятностью

12. Отношение меры области, благоприятствующей появлению события, к мере всей области называется

a) геометрической вероятностью
b) классической вероятностью
c) затрудняюсь ответить

13. Вероятность появления события А определяется неравенством

a) 0<P(A)<1
b) 0≤P(A) ≤1
c) 0<P(A) ≤1
d) затрудняюсь ответить

14. Сумма вероятностей противоположных событий равна

a) 1
b) 0
c) затрудняюсь ответить

15. Вероятность $P_A(B)$ называется

a) классической вероятностью
b) геометрической вероятностью
c) условной вероятностью

16. Формула называется $P(A) = P(H_1)P_{H_1}(A) + P(H_2)P_{H_2}(A) + ... + P(H_n)P_{H_n}(A)$

a) формулой полной вероятности
b) формулой Бейеса
c) формулой Бернулли
d) затрудняюсь ответить

17. Позволяет переоценить вероятность гипотез после того как становится известным результат испытания

a) формула полной вероятности
b) формула Бейеса
c) формула Бернулли
d) затрудняюсь с ответом

18. Вероятность того, что в n испытаниях, в каждом из которых вероятность появления события А равна P($0 \le P \le 1)$, событие наступит ровно m раз определяется по

a) формуле Бернулли
b) теореме Муавра-Лапласа
c) интегральной теореме Лапласа

19. Формула Муавра–Лапласа применяется в случаях, когда

a) n - велико

b) n мало
c) n<5
d) затрудняюсь ответить

20. Функция $\varphi(x)$ в формуле Муавра – Лапласа

a) четная
b) нечетная
c) затрудняюсь ответить

21. Вероятность р наступления события А в каждом испытании постоянно и отлично от 0 и 1, то вероятность определяется по

a) формуле Бернулли
b) интегральной теореме Лапласа
c) локальной теореме Лапласа
d) затрудняюсь ответить

22. Ф(x) в локальной теореме Лапласа

a) четная
b) нечетная

c) затрудняюсь ответить

23. Вычислить P_4

a) 4
b) 16
c) 24
d) затрудняюсь ответить

24. Вычислить A_6^4

a) 8
b) 12
c) 6
d) затрудняюсь ответить

Время на выполнение: 45 минут

Перечень объектов контроля и оценки

Наименование объектов контроля и оценки	**Основные показатели оценки результата**	**Оценка**
У 1. Применять стандартные методы и модели к решению вероятностных и статистических задач	- Вычисление вероятности при повторении испытаний по формуле Бернулли, Пуассона, теоремы Муавра-Лапласа	
З 2. Основы теории вероятностей и математической статистики	- Определение алгоритма действий вычисления вероятности при повторении испытаний по формулам Бернулли, Муавра-Лапласа, Пуассона	

За верное решение задачи выставляется положительная оценка – 1балл
За неверное решение задачи выставляется отрицательная оценка – 0 баллов.

3. Материалы для подготовки к зачету

Теоретические вопросы

1. Перестановки, размещения, сочетания
2. Функция распределения, ее свойства
3. Условная вероятность
4. Генеральная и выборочная средние
5. Вероятность появления хотя бы одного события
6. Статическая проверка гипотез. Проверка гипотезы о нормальном распределении генеральной совокупности. Критерий согласия Пирсона.
7. Вероятность попадания случайной величины, имеющей нормальное распределение на заданный участок
8. Групповая и общая средние
9. Показательное распределение НСВ
10. Генеральная и выборочная дисперсии

11. Числовые характеристики ДСВ. Дисперсия числа появлений события в независимых испытаниях
12. Разыгрывание полной группы событий
13. Закон распределения вероятностей дискретной случайной величины
14. Точность оценки, доверительная вероятность. Доверительный интервал
15. Центральная предельная теорема
16. Формула для вычисления дисперсии
17. Теорема сложения вероятностей для несовместных событий
18. Доверительный интервал для оценки математического ожидания нормального распределения при известном σ
19. Биноминальное распределение дискретной случайной величины
20. Способы отбора
21. Числовые характеристики ДСВ. Дисперсия. Свойства дисперсии
22. Разыгрывание непрерывной случайной величины
23. Понятие случайной величины. Дискретные и непрерывные случайные величины
24. Статические оценки параметров распределения. Несмещенные, эффективные и состоятельные оценки
25. Повторение испытаний. Формула Бернулли
26. Числовые характеристики НСВ
27. Гипергеометрическое распределение дискретной случайной величины
28. Другие характеристики вариационного ряда. Мода, медиана, размах варьирования. Среднее абсолютное отклонение, коэффициент вариации
29. Теорема сложения вероятностей для совместных событий
30. Генеральная и выборочная совокупности
31. Теорема умножения вероятностей
32. Числовые характеристики ДСВ. Среднее квадратичное отклонение
33. Теорема гипотез (формула Бейеса)
34. Теорема Муавра-Лапласа
35. Статистическая вероятность
36. Равномерное распределение НСВ

37. Геометрическая вероятность
38. Нормальное распределение НСВ
39. Числовые характеристики ДСВ. Математическое ожидание числа появлений события в независимых испытаниях
40. Полигон и гистограмма
41. Повторение испытаний. Интегральная теорема Лапласа
42. Неравенство и теорема Чебышева
43. Дискретная случайная величина. Распределение Пуассона
44. Повторная и безповторная выборки. Репрезентативная выборка
45. Геометрическое распределение дискретной случайной величины
46. Статистическое распределение выборки
47. Формула для вычисления дисперсии (теорема)
48. Метод сумм для вычисления выборочных средней и дисперсии
49. Перестановки, размещения, сочетания
50. Функция распределения, ее свойства
51. Условная вероятность
52. Генеральная и выборочная средние
53. Вероятность появления хотя бы одного события
54. Статическая проверка гипотез. Проверка гипотезы о нормальном распределении генеральной совокупности. Критерий согласия Пирсона
55. Вероятность попадания случайной величины, имеющей нормальное распределение на заданный участок
56. Групповая и общая средние
57. Показательное распределение НСВ
58. Генеральная и выборочная дисперсии
59. Числовые характеристики ДСВ. Дисперсия числа появлений события в независимых испытаниях
60. Разыгрывание полной группы событий

Практические задания

Вариант 1	Вариант 2
1. В урне 4 белых и 6 черных шаров. Найти вероятность того, что вынимая из урны 3 шара, мы получим: а) больше белых, чем черных; б) больше черных, чем белых. 2. Два стрелка произвели по одному выстрелу. Вероятность попадания в мишень первым стрелком равна 0,7, а вторым — 0,6 Найти вероятность того. что хотя бы один из стрелков попал в мишень. 3. Бомбардировщик может быть атакован истребителем под разными курсовыми углами. Случайная величина X - курсовой угол, распределена по закону, заданному плотностью распределениявероятностей $f(x)=\begin{cases} A\cos x, & при\ -\frac{\pi}{2}\le x\le\frac{\pi}{2}, \\ 0, & при\ \lvert x\rvert>\frac{\pi}{2}. \end{cases}$ Найти коэффициент А и математическое ожидание случайной величины X. Вычислить вероятность того, что атакующий истребитель может быть обстрелян, если на бомбардировщике имеется стрелковая установка, позволяющая обстреливать истребитель, когда курсовой угол находится в интервале от $-\frac{\pi}{3}$ до $\frac{\pi}{3}$. 4. Найти вероятность того, что событие *А* появится в пяти независимых испытаниях не менее двух раз, если в каждом испытании вероятность появления события *А* равна 0,3. 5. В урне 4 белых и 3 черных шара. Из нее достают не глядя, один шар. Шары в урне перемешивают. После этого из урны вынимают второй шар. Найти вероятность того, что этот шар будет белым.	1. По статистическим данным в первой половине мая (с 1 по 15) погожими бывают 11 дней. Какова вероятность, что в случайно выбранные 4 дня не будет дождя? 2. Два стрелка, независимо один от другого делают по два выстрела (каждый по своей мишени). Вероятность попадания при одном выстреле для первого стрелка 0,4, для второго - 0,5. Найти вероятность того, что в мишени первого стрелка будет больше пробоин. 3. Функция распределения случайной величины X имеет вид $F(x)=\begin{cases} 0, & при\ x<3, \\ 1-\left(\frac{3}{x}\right)^2, & при\ x\ge 3. \end{cases}$ Найти математическое ожидание, моду и дисперсию случайной величины X, а также вероятность попадания случайной величины в интервал (3, 4). 4. В цехе 8 моторов. Для каждого мотора вероятность того, что он в данный момент включен, равна p = 0,8. Найти вероятность того, что в данный моментa) включено 3 мотора, б) выключены все моторы. 5. Из трех партий резисторов (в каждой партии 12 резисторов) случайным образом взят для испытания 1 резистор. Какова вероятность, что резистор неисправен, если в первой партии исправных резисторов 4, во второй - 8, а в третьей исправных нет.

4. Информационные источники

Основные источники

1. Кацман, Ю. Я. Теория вероятностей и математическая статистика : учебное пособие для СПО / Ю. Я. Кацман. — Саратов : Профобразование, 2019. — 130 с. — ISBN 978-5-4488-0031-3. — Текст : электронный // Электронно-библиотечная система IPR BOOKS : [сайт]. — URL: https://www.iprbookshop.ru/83119.html
2. Михин, М. Н. Теория вероятностей : учебное пособие для СПО / М. Н. Михин, Т. Б. Белова. — Саратов, Москва : Профобразование, Ай Пи Ар Медиа, 2020. — 94 с. — ISBN 978-5-4488-0819-7, 978-5-4497-0488-7. — Текст : электронный // Цифровой образовательный ресурс IPR SMART : [сайт]. — URL: https://www.iprbookshop.ru/93074.html
3. Горюшкин, А. А. Математическая статистика : практикум для СПО / А. А. Горюшкин, Г. Д. Ковалева, О. И. Гулакова ; под редакцией Г. М. Мкртчяна. — Саратов, Москва : Профобразование, Ай Пи Ар Медиа, 2020. — 58 с. — ISBN 978-5-4488-0813-5, 978-5-4497-0478-8. — Текст : электронный // Цифровой образовательный ресурс IPR SMART : [сайт]. — URL: https://www.iprbookshop.ru/96016.html